Ανάλυση

Ορ. $f\ (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)\ \uparrow, \downarrow$.

Ορ. sup f (άνω πέρας): το ελάχιστο του συνόλου των άνω φραγμάτων του $f(A)$.
inf f (κάτω πέρας) το μέγιστο κάτω.

Πρόταση:

Ας είναι $f, g\ A \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις (φραγμ.).

(i) $\sup(-f) = -\inf f$, $\inf(-f) = -\sup f$.

(ii) $f(x) \leq g(x),\ x \in A \Rightarrow \sup f \leq \sup g$
$\inf f \leq \inf g$.

(iii) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$
$\inf f + \inf g \leq \inf(f+g)$.

(iv) $\sup f + \inf g \leq \sup(f+g)$

(v) $\inf f(f+g) \leq \inf f + \inf g$? να το ψάξω στο βιβλίο

(vi) $\sup(f+c) = \sup f + c$.
$\inf(f+c) = \inf f + c$

(XI) $\sup|f| = \max\{\sup f, -\inf f\}$.

Απόδειξη:

(i) $\sup(-f) = -\inf f$

Για $x \in A$ έχουμε $-f(x) \leq \sup(-f)$

$-\sup(-f) \leq f(x)$

$-\sup(-f) \leq \inf f$

$-\inf f \leq \sup(-f)$ (I).

Επίσης για $x \in A$ $\inf f \leq f(x)$.

$-f(x) \leq -\inf f$

$\sup(-f) \leq -\inf f$ (II).

(I),(II) $\sup(-f) = -\inf f$.

(ii) Για $x \in A$ έχουμε

$f(x) \leq g(x) \leq \sup g$.

Δηλ. το $\sup g$ είναι ένα άν. φ. τ

άρα $\sup f \leq \sup g$.

Απόδειξη:

iii) Για $x \in A$ έχουμε: $\inf f \le f(x)$.

$\inf g \le g(x)$.

$\inf f + \inf g \le f(x) + g(x)$, $x \in A$

άρα το $\inf f + \inf g$

κλπ

iv) $\sup(f) = \sup(f+g-g)$

$\overset{(iii)}{\le} \sup(f+g) + \sup(-g)$

$\overset{(i)}{=} \sup(f+g) - \inf g$.

$\Rightarrow \sup f + \inf g \le \sup(f+g)$.

(vi). $\sup(f+c) \le \sup f + \sup c = \sup f + c$. (I)

(iv) $\to$ $\sup f + \inf c \le \sup(f+c)$

$\sup f + c$. κλπ

xI) Για $x \in A$ έχουμε: $f(x) \le \sup f \le \sup|f|$ (I)

$-|f(x)| \le f(x)$

$-f(x) \le |f(x)| \Rightarrow \sup(-f(x)) \le \sup|f|$

$-\inf f \le \sup|f|$ (II)

δηλ $\sup f, -\inf f \le \sup|f|$

άρα και $M = \max\{\inf f, \inf f\} \le \sup(f)$ (III).

Επίσης. $f(x) \le \sup f$

$-f(x) \le -\inf f \Rightarrow |f(x)| \le \max\{\sup f, -\inf f\}$.

⊛ Ας είναι $(E, \leq)$ σύνολο θα λέμε ότι το E είναι κενορεσμένο αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του E έχει supremum.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι κάτωθι προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του E έχει supremum.

ii) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του E έχει infimum.

Απόδειξη: (ΑΣΚΗΣΗ)

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Knaster) Ας είναι $(E, \leq)$ μ.δ και A κενορεσμένο $\subseteq E$, με μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, αν $\phi: A \to A$ αύξουσα, τότε $\exists a \in A : \phi(a) = a$

Απόδειξη: Θεωρώ το σύνολο $X = \{x \in A : x \leq \phi(x)\}$

Προφανώς $X \subseteq A \Rightarrow X$ άνω φραγμένο

Από την υπόθεση $\exists$ το $\sup X = a$

Για $y \in X$ θα είναι $y \leq a$ και $y \leq \phi(y)$

$y \leq \phi(y) \leq \phi(a)$

δηλ. το $\phi(a)$ είναι α.φ του $X \Rightarrow$ άρα $a \leq \phi(a)$ (I)

επίσης $\phi(a) \leq \phi(\phi(a))$ δηλ. $\phi(a) \in X$ άρα $\phi(a) \leq a$ (II)

$\Rightarrow \phi(a) = a$

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ || $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a,b) \to a+b$ || $(a,b) \to a\cdot b$

(A1) $x+y=y+x$

(A2) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(A3) $\exists\, 0\in\mathbb{R} : x+0=0+x=x$

(A4) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\, x'(-x) : x+(-x)=0$

(A5) $x\cdot y=y\cdot x$

(A6) $x(y\cdot z)=(x\cdot y)z$

(A7) $\exists\, 1\in\mathbb{R} : x\cdot 1=1\cdot x=x$

(A8) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\, x'(=1/x) : 1/x\cdot x=1$

(A9) $x(y+z)=xy+xz$

(A10) $x\geq y \Rightarrow x+z\geq y+z$

(A11) $\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\cdot y>0$

(A12) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $\subseteq\mathbb{R}$ έχει supremum.

(*) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$ $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (i) Τα 0, 1 είναι μοναδικά.

(ii) Το $-x$ είναι μοναδικά ορισμένο.

(iii) " x $(x \neq 0)$

(iv) $\left.\begin{matrix} xy = zy \\ y \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = z$

(v) $0 \cdot x = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i) Έστω ότι $\exists\, \hat{0} \in \mathbb{R}: x + \hat{0} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

τότε $\hat{0} = \hat{0} + 0$ (0: ουδέτερο στοιχ.)

$= \hat{0}'$: ουδ.

(ii) Έστω ότι $\exists\, x': x + x' = 0$

$$-x = -x + 0 = -x\,(x + x') = (-x + x) + x' = 0 + x' = x'$$

$$x + (-x) = 0$$
$$x = -(-x)$$

(v) $0x = (0+0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x + (-0x) = 0x + 0x + (-0x)$

$\Rightarrow 0 = 0x + 0 \Rightarrow 0 = 0x$

vi) $x(-y) = -xy$

Απόδειξη: Είναι $0 = x \cdot 0 = x(y + (-y))$

$\Rightarrow 0 = xy + x(-y)$

$\vdots$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (i) $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$, $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ (A_{11})

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right| \xrightarrow{(A_{10})} \begin{array}{l} x+y > 0+y \\ y > 0 \end{array} \Rightarrow x+y > 0$$

(ii) $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^-$ $\Big\|$ $\begin{array}{l} x > 0 \\ x + (-x) > -x, \ 0 > -x \end{array}$

(iii) $1 > 0$

(iv) $\left.\begin{array}{l} x < y \\ z > 0 \end{array}\right\| \Rightarrow xz < yz$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο. Τότε

$\exists\, z = \sup A \Leftrightarrow$ z: άνω φράγμα του A

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : z - \varepsilon < x$

$(z \in \mathbb{R})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $z = \sup A$ (δηλ. το z ελάχιστο των άνω φραγμάτων) άρα το z είναι α.φ. του A.

Ας είναι $\varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ αν $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \nexists\, x \in A$ με $z - \varepsilon_0 < x$

τότε $\forall x \in A$ θα είναι $x \leq z - \varepsilon_0$

δηλ. το $z - \varepsilon_0$ είναι α.φ. του A με

$z - \varepsilon_0 < z$, Άτοπο!

(⇐) Υποθ. ότι για τον $z \in \mathbb{R}$ ισχύει $z-\varepsilon < x$ αρκεί ν.α.ο το z είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Έστω ότι $\exists z' \in \mathbb{R}$: άνω φράγμα του A και $z' < z$ τότε για τον $\varepsilon = z - z' > 0$ θα είναι $x \le z - \varepsilon \quad \forall x \in A$

⋮

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε ότι $\sup\left\{\frac{\nu}{\nu+1}\right\}_{\nu \in \mathbb{N}} = 1$

→ $\frac{\nu}{\nu+1} \le 1 \Rightarrow 1$ α.φ.

→ $\forall \varepsilon > 0 : \exists \nu \in \mathbb{N}$:

$$1 - \varepsilon < \frac{\nu}{\nu+1} \Rightarrow \frac{1-\nu}{\nu+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\nu+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \nu + 1 \quad \text{άρα} \quad [1/\varepsilon] + 1 < \nu + 1 \Rightarrow$$

$$[1/\varepsilon] < \nu$$

► $\inf\left\{(-1)^{\nu} \frac{1}{\nu}\right\}$